Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – Théorie de la Gravitation

# – Dernière séance d'exercices –

métrique de Schwarzschild & trous noirs

---

**Exercice 1 : vers le trou noir.** Soit un observateur massif en chute libre vers un trou noir de Schwarzschild. On se place dans le cas parabolique (c'est-à-dire $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau \to 0$ quand $r \to +\infty$). En outre, on suppose que l'observateur n'a pas de vitesse angulaire.

a. Déterminer les constantes $a$ et $b$ dans les équations du mouvement obtenues lors de la séance précédente.

b. On note $\tau$ le temps propre le long de la trajectoire de l'observateur. Sachant que l'observateur part de $r_0$ en $\tau = 0$, calculer le temps propre en fonction de la distance radiale $\tau(r)$.

c. Montrer qu'en partant d'une distance radiale finie, on atteint $r = 2M$ en un temps propre fini.

d. Montrer que $t \to \infty$ pour $r \to 2M$.

e. Montrer qu'on atteint la singularité $r = 0$ en un temps propre fini.

f. L'observateur envoie régulièrement des signaux vers un autre observateur situé loin de l'étoile. Calculer $\Delta t_{\text{réception}}$ en fonction de $\Delta\tau_{\text{émission}}$. Calculer le décalage des fréquences (redshift). Que se passe-il pour $r \to 2M$ ?

**Exercice 2 : Global Positioning System (GPS).** Le système GPS est composé de vingt-quatre satellites munis d'horloges atomiques circulant autour de la Terre et qui transmettent en continu le temps indiqué par leurs horloges internes et leurs positions aux récepteurs situés au sol. En analysant les signaux de quatre satellites, un récepteur peut déterminer avec précision (environ 25m) sa position sur Terre pour autant que son horloge interne soit synchronisée avec celle des satellites.

La manière dont le système fonctionne est la suivante : le récepteur GPS reçoit un signal en provenance de chaque satellite visible lui indiquant la position $x^i$ de ce dernier et le temps $t$ auquel ledit signal a été émis. Le récepteur trace ensuite (virtuellement, bien entendu) une sphère centrée en $x^i$ et de rayon $ct$. En utilisant les signaux émis pas trois satellites, le récepteur peut déterminer sa position (l'intersection de trois sphères, si elle existe, est généralement composée de deux points dont un peut être rejeté puisqu'on sait qu'on est situés sur la surface de la Terre). Le quatrième signal sert à plus de précision.

Pour que ce système fonctionne correctement, il faut que les différentes horloges soient synchronisées entre-elles. Or on sait qu'en différents points du champs gravitationnel le temps s'écoule différement. On va montrer que les corrections de la relativité générale se doivent d'être prises en compte pour ce faire. Plus précisément, on va regarder comment les horloges se « désynchronisent » à cause du champ de gravitation.

a. Les satellites ont des orbites circulaires ayant une période de 12h. Calculer le rayon de l'orbite et la vitesse des satellites en utilisant les lois de la mécanique Newtonienne. On montrera plus tard que cette approximation est justifiée. Pour rappel, la masse de la Terre est de $m_\oplus = 5,98\,10^{24}$kg et $G = 6,67\,10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$.

b. En utilisant la métrique de Schwarzschild, obtenir une expression pour $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}/\mathrm{d}\tau_{\oplus}$ où $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{d}\tau_{\oplus}$ sont les temps propres qui s'écoulent pendant un même intervalle de temps $\mathrm{d}t$ pour un observateur situé à l'infini. Utiliser $(1+d)^n = 1 + nd + \ldots$ pour écrire le rapport sous la forme

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}/\mathrm{d}\tau_{\oplus} = 1 + b + \ldots$$

c. Rétablir les constantes $G$ et $c$ pour que les termes de la correction $b$ soient sans dimension.

d. Évaluer $b$ en supposant qu'on peut négliger les vitesses $v = r\frac{d\phi}{dt}$ des observateurs. La correction obtenue est uniquement due à aux positions différentes des horloges dans le champ de gravitation. Quel est le décalage entre $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{d}\tau_{\oplus}$ dû à cette correction après une journée ?

e. Évaluer $b$ en tenant compte des vitesses des observateurs. Quel est le décalage entre $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{d}\tau_{\oplus}$ dû à cette correction après une journée ? Quelle distance la lumière parcourt-elle pendant ce temps ? Que pouvez-vous en conclure ?

f. En utilisant Newton, on a utilisé $v_N = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}$ alors qu'il faut utiliser $v = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$. Montrer que l'approximation effectuer en (a.) était justifiée.

***Exercice 3 : thermodynamique des trous noirs.** Cet exercice porte sur des aspects plus avancés des trous noirs, en connexion avec la théorie quantique des champs. Nous allons montrer qu'il est possible d'associer à un trou noir une température et une entropie, la température étant celle du rayonnement thermique de Hawking émis par le trou noir.

En théorie quantique des champs, un système en équilibre thermique à une température donnée $T$ va être caractérisé par des fonctions de Green périodiques en la variable temporelle [1], de période imaginaire $i\beta$ ($\beta \equiv 1/T$). Ceci revient à effectuer la quantification dans un espace euclidien dont la coordonnée temporelle est périodique de période $\beta$. Considérons donc la version euclidienne du trou noir de Schwarzschild, obtenue en posant $t = it_E$ :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)\mathrm{d}t_E^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \qquad (c = 1,\ \hbar = 1)$$

a. Montrer que, au voisinage de son horizon, le « trou noir euclidien » possède une topologie $\mathbb{R}^2 \times S^2$ ssi $t_E$ est périodique de période $\beta$.

b. Déterminer $\beta$.

c. Si la période est différente, montrer qu'on a une singularité conique (et pas ponctuelle).

INDICATIONS : poser $\varepsilon \equiv r - 2MG$ et évaluer la métrique au premier ordre en $\varepsilon$. Déterminer $\xi = \xi(\varepsilon)$ tel que $\xi(0) = 0$ et tel qu'on ait clairement une topologie $\mathbb{R}^2 \times S^2$ au voisinage de l'horizon.

La température naturellement associée au trou noir est donnée par $T = \frac{1}{\beta}$.

d. Déterminer l'entropie $S(M)$ telle que $\mathrm{d}M = T(M)\,\mathrm{d}S(M)$.

e. Exprimer $S(M)$ en fonction de l'aire de l'horizon du trou noir.

1. Une intuition par rapport à ce fait peut être obtenue en considérant la relation entre la fonction de partition à température fixée $Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$ et l'opérateur quantique d'évolution du système $U(t) = e^{itH}$, où $H$ est l'hamiltonien du système en question.